スイングバイ航法（2011 滋賀医科大学）

探査機が惑星の近くを通過するときは，惑星と探査機は互いに万有引力をおよぼしあい，探査機の惑星に近づく前の太陽に対する速さに比べて，遠ざかった後の速さを，搭載している燃料を消費しなくても増加させることができる。これも一種の衝突と考えることができる。太陽，惑星，探査機を O，P，Q，2 つの物体（惑星と探査機）の重心を C とし，太陽，惑星，探査機の質量を M_0， M， m とする。惑星と探査機の軌道は同じ平面内にあるとし， $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{R}$， $|\vec{R}|=R$， $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{r}$， $|\vec{r}|=r$，万有引力定数を G とする。

問 1　惑星と探査機が接近するのは太陽から遠く離れた場所とすると，r は R に比べて十分小さく，惑星と探査機にはたらく太陽によるそれぞれの万有引力は，それぞれが C の位置にあった場合の引力に等しいとできる。したがって，探査機の受ける太陽からの引力は $-\dfrac{GmM_0\vec{R}}{R^3}$ （引力の大きさは $\dfrac{GmM_0}{R^2}$ ）となる。惑星と探査機の間の引力を考慮して，太陽に対する探査機と惑星の加速度 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を求めよ。

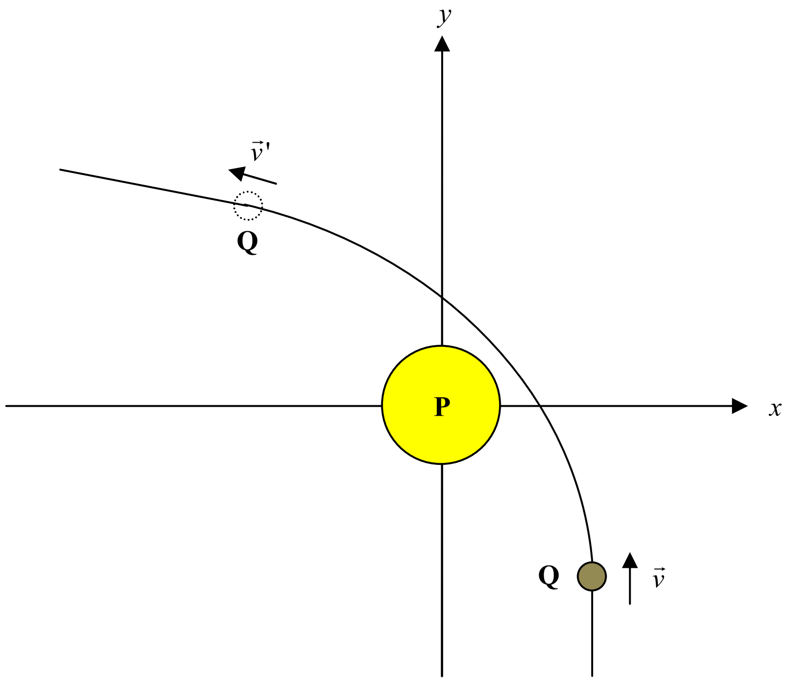
太陽に対する C の加速度は $\dfrac{m\vec{a}+M\vec{b}}{m+M}$ となる。これを用いて，C に対する相対速度と同様に，C に対する相対加速度を求めることができる。

問 2　問 1 の結果を用い，C に対する探査機と惑星のそれぞれの相対加速度を $\vec{r}$， r を用いて表せ。導出過程も記述せよ。

問 2 の結果を用いて, C にいる観測者から見た惑星と探査機の運動量の和と力学的エネルギーの和は保存されることがわかり，運動エネルギーの和は，両者が十分離れていて相互の引力が無視出来る接近前と接近後（衝突の前後）で変化しないことがわかる。運動量の保存則と， M は m に比べて十分大きいことより，この場合の惑星の運動エネルギーは無視することができる。したがって，C にいる観測者から見て，探査機が接近前後で図に示すような軌道を描くとき，接近前の速度 $\vec{v}$ は y 軸の正の方向で大きさが v とし，接近後の速度を $\vec{v}'$ （x， y 成分は v'_x， v'_y）とすると， $|\vec{v}|=|\vec{v}'|$ となる。M は m に比べて十分大きいので，C は P に十分近く，太陽に対する C の速度は，太陽に対する惑星の速度 $\vec{V}$ （向きは x 軸の負の方向，大きさは V で，接近の前後で一定とすることができる）に等しいとできる。

問 3　接近の前後での太陽に対する探査機の運動エネルギーの増加量を求めよ。また， $\vec{v}$ と $\vec{V}$ が一定のとき， $\vec{v}'$ が $\vec{V}$ に対してどのような向きであるとき，運動エネルギーの増加量が最大になるか述べよ。

このように探査機の速度を惑星の引力を利用して変化させることをスイングバイ（フライパン）と呼ぶ。はやぶさや 1977 年に打ち上げられた探査機ボイジャーも航行にスイングバイを利用した。



y
$\vec{v}'$
Q
P
x
Q
$\vec{v}$

解答と解説

問 1

$$\vec{a} = -\frac{GM_0\vec{R}}{R^3} - \frac{GM\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{b} = -\frac{GM_0\vec{R}}{R^3} + \frac{Gm\vec{r}}{r^3}$$

解説

力ベクトル $\vec{F}$ は，その大きさと方向ベクトルの単位ベクトルの積で表せる。

したがって，方向ベクトルの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると， $\vec{F} = \left|\vec{F}\right|\vec{e}$ となる。

探査機が太陽から受ける万有引力の方向ベクトルの単位ベクトルは，$-\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} = -\frac{\vec{R}}{R}$ だから，

太陽から受ける万有引力ベクトル＝$\frac{GmM_0}{R^2}\cdot\left(-\frac{\vec{R}}{R}\right) = -\frac{GmM_0\vec{R}}{R^3}$

同様に，探査機が惑星から受ける万有引力ベクトル＝$\frac{GmM}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{GmM\vec{r}}{r^3}$

よって，探査機の運動方程式は， $m\vec{a} = -\frac{GmM_0\vec{R}}{R^3} - \frac{GmM\vec{r}}{r^3}$

ゆえに， $\vec{a} = -\frac{GM_0\vec{R}}{R^3} - \frac{GM\vec{r}}{r^3}$

同様にして，

惑星が太陽から受ける万有引力ベクトル＝$-\frac{GMM_0\vec{R}}{R^3}$

惑星が探査機から受ける万有引力ベクトル＝$\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{GMm\vec{r}}{r^3}$

よって，惑星の運動方程式は， $M\vec{b} = -\frac{GMM_0\vec{R}}{R^3} + \frac{GMm\vec{r}}{r^3}$

ゆえに， $\vec{b} = -\frac{GM_0\vec{R}}{R^3} + \frac{Gm\vec{r}}{r^3}$

問 2

太陽に対する C の加速度は $\dfrac{m\vec{a}+M\vec{b}}{m+M}$ とあるから，C の加速度を $\vec{c}$ とすると，

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\frac{m\vec{a}+M\vec{b}}{m+M}\\&=\frac{m}{m+M}\left(-\frac{GM_0\vec{R}}{R^3}-\frac{GM\vec{r}}{r^3}\right)+\frac{M}{m+M}\left(-\frac{GM_0\vec{R}}{R^3}+\frac{Gm\vec{r}}{r^3}\right)\\&=-\frac{GM_0\vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$

あるいは，

惑星と太陽からなる系の重心 C について，

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=-\vec{R}$，重心の質量＝$m+M$ より，

C が受ける万有引力ベクトル＝$\dfrac{G(m+M)M_0}{R^2}\cdot\left(\dfrac{-\vec{R}}{R}\right)=-\dfrac{G(m+M)M_0\vec{R}}{R^3}$

よって，重心 C の加速度を $\vec{c}$ とすると，

C の運動方程式は，$(m+M)\vec{c}=-\dfrac{G(m+M)M_0\vec{R}}{R^3}$ $\quad\therefore\vec{c}=-\dfrac{GM_0\vec{R}}{R^3}$

これより，

C に対する探査機の加速度＝$\vec{a}-\vec{c}=-\dfrac{GM_0\vec{R}}{R^3}-\dfrac{GM\vec{r}}{r^3}-\left(-\dfrac{GM_0\vec{R}}{R^3}\right)=-\dfrac{GM\vec{r}}{r^3}$ ・・・(答)

C に対する惑星の加速度＝$\vec{a}-\vec{c}=-\dfrac{GM_0\vec{R}}{R^3}+\dfrac{Gm\vec{r}}{r^3}-\left(-\dfrac{GM_0\vec{R}}{R^3}\right)=\dfrac{Gm\vec{r}}{r^3}$ ・・・(答)

補足

C にいる観測者から見ると，

探査機に働く外力＝$m\cdot\left(-\dfrac{GM\vec{r}}{r^3}\right)=-\dfrac{GMm\vec{r}}{r^3}$ ・・・①

惑星に働く外力＝$M\cdot\dfrac{Gm\vec{r}}{r^3}=\dfrac{GMm\vec{r}}{r^3}$ ・・・②

①＋②＝0 より，探査機と惑星の運動量の和は保存される。

また，これらの力は探査機と惑星の間に働く万有引力であり，

万有引力は保存力だから，力学的エネルギーの和も保存される。

とくに，両者が十分離れていて相互の万有引力の位置エネルギーが無視できる接近前と接近後においては，「運動エネルギーの和＝力学的エネルギーの和」としてよい。

問 3

C に対する探査機の速度：接近前 $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$，接近後 $\vec{v}'=\begin{pmatrix}v'_x\\v'_y\end{pmatrix}$

太陽に対する C の速度：$\vec{V}=\begin{pmatrix}-V\\0\end{pmatrix}$

太陽に対する C の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，C に対する探査機の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$，

太陽に対する探査機の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で表わされるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

よって，太陽に対する探査機の速度ベクトルは，

接近前 $\vec{V}+\vec{v}=\begin{pmatrix}-V\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-V\\v\end{pmatrix}$

接近後 $\vec{V}+\vec{v}'=\begin{pmatrix}-V\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v'_x\\v'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-V+v'_x\\v'_y\end{pmatrix}$

よって，接近前後の探査機の太陽に対する運動エネルギーの増加量は，

$$\frac{1}{2}m\left\{(-V+v'_x)^2+{v'_y}^2\right\}-\frac{1}{2}m\left\{(-V)^2+v^2\right\}=\frac{1}{2}m\left(-2v'_xV+{v'_x}^2+{v'_y}^2-v^2\right)$$

ここで，$|\vec{v}|=|\vec{v}'|$ より，$v^2={v'_x}^2+{v'_y}^2$ $\therefore {v'_x}^2+{v'_y}^2-v^2=0$

よって，$\frac{1}{2}m\left\{(-V+v'_x)^2+{v'_y}^2\right\}-\frac{1}{2}m\left\{(-V)^2+v^2\right\}=\frac{1}{2}m(-2v'_xV)$

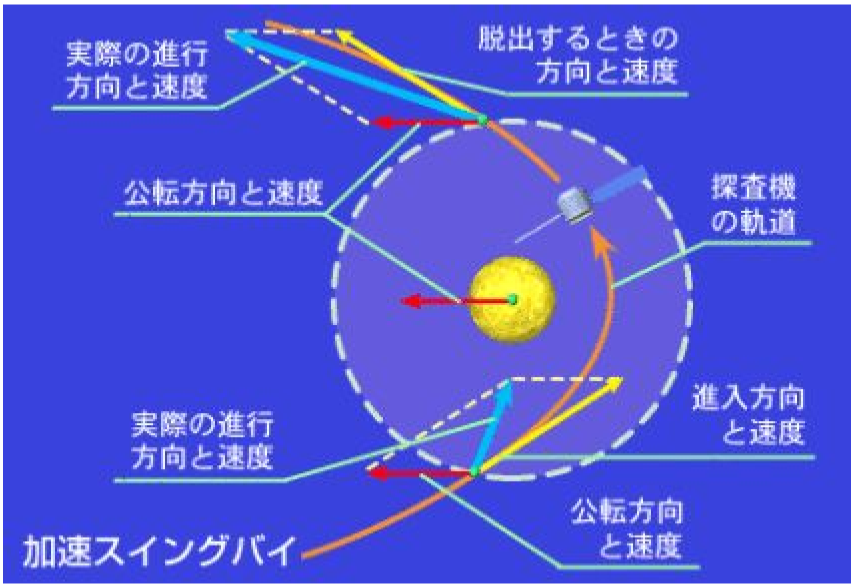
$=-mv'_xV$　・・・(答)

これが最大になるためには，$\vec{v}'=\begin{pmatrix}v'_x\\v'_y\end{pmatrix}$ において，$v'_x<0$ かつ $v'_y=0$ であればよい。

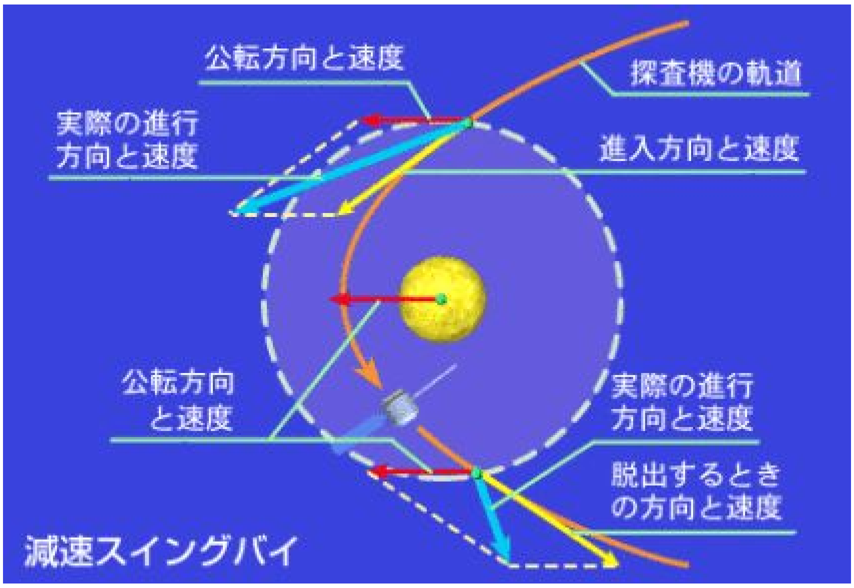
これと $|\vec{V}|<|\vec{v}|$，$\vec{V}$ は x 軸の負の方向より，

$\vec{v}'$ の $\vec{V}$ に対する速度が x 軸の負の方向であればよい。　・・・(答)

加速スイングバイ＝月の公転速度によって加速される



減速スイングバイ＝月の公転速度によって減速される



宇宙情報センター　スイングバイ航法　http://spaceinfo.jaxa.jp/ja/swingby_navigation.html